ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (19-01-2005)

ΘΕΜΑ Ι. Δίνονται τα διανύσματα $\bar{a} = (1,2,3)$, $\bar{b} = (3,2,-1)$.

(i) Να αποδειχθεί ότι τα $\bar{a},\bar{b}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(ii) Να βρεθεί μία βάση του R^3 που να περιέχει τα $\bar{a},\bar{b}$.

(iii) Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $\bar{c} = (8,-10,4)$ ως προς τη βάση του ερωτήματος (ii).

(iv) Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\bar{a},\bar{b}$.

(v) Να υπολογιστεί το γινόμενο $(((\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{b})\times\bar{b})\cdot\bar{c} =$;

(Μ. 25)

ΘΕΜΑ ΙΙ. Δίνονται τα σημεία $A(1,0,1)$, $B(0,1,0)$ και το επίπεδο $(\pi): x - y + z - 1 = 0$.

(i) Να βρεθεί το σημείο τομής του επιπέδου (π) και της ευθείας (ε), που ορίζεται από τα σημεία A,B.

(ii) Να βρεθεί η σφαίρα Σ που έχει διάμετρο το AB.

(iii) Να αποδειχθεί ότι η σφαίρα Σ τέμνει το επίπεδο (π).

(iv) Να βρεθεί η ακτίνα και το κέντρο του κύκλου (c), που ορίζεται από την τομή της Σ με το (π).

(v) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π_1), που είναι παράλληλο στο (π) και διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας Σ.

(Μ. 25)

ΘΕΜΑ ΙΙΙ. Α) Στο επίπεδο Oxy δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$.

(i) Να αποδειχθεί ότι παριστάνει έλλειψη.

(ii) Να μετατραπεί η εξίσωση σε απλούστερη αναγνωρίσιμη μορφή.

(iii) Να βρεθεί η εκκεντρότητα και τα μήκη των ημιαξόνων.

(iv) Να βρεθούν οι εστίες της έλλειψης στο σύστημα Oxy.

(v) Να σχεδιαστεί προσεγγιστικά στο σύστημα Oxy.

(Μ. 15)

Β) Στο ορθογώνιο σύστημα Oxyz δίνεται επιφάνεια με εξίσωση

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα OXYZ που προκύπτει από το Oxyz με στροφή περί τον άξονα Ox κατα γωνία π/4. Βρείτε τη μορφή της εξίσωσης στο νέο σύστημα. Από τη νέα μορφή της εξίσωσης να αναγνωριστεί το είδος της επιφάνειας.

(Μ. 10)

ΘΕΜΑ IV. **Α)** Στον R^3 δίνεται η καμπύλη $(c):(x^2+y^2=1,\ z=0)$. Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό την (c) και γενέτειρες παράλληλες στο διάνυσμα $\bar{\alpha}=(1,1,1)$.

(Μ. 8)

Β) Τι παριστάνει (δικαιολογείστε την απάντησή σας) στο **χώρο** R^3 κάθε μία από τις επόμενες εξισώσεις :
(i) $2(x-1)^2+y^2=0$, (ii) $(y-1)^2=4(x+2)^2$, (iii) $5x+4y^2=0$,
(iv) $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=0$, (v) $(x+2)^2-(y-1)^2+z^2=0$,
(vi) $(x+2)^2-(y-1)^2+z^2=1$, (vii) $2x^2-xz+2xy-yz-1=0$,
(viii) $x^2+z^2-y^{2005}=1$, (ix) $2x^2-y^2-4x-z+2=0$.

(Μ. 9)

Γ) Δίνεται η σφαίρα $(\Sigma): x^2+y^2+z^2-2x+4y-11=0$.
(i) Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο (π) της Σ στο σημείο $A(1,-2,4)$ αυτής.
(ii) Να βρεθεί το συμμετρικό του κέντρου K της σφαίρας ως προς το επίπεδο (π).

(Μ. 8)